RODOLFO GUIDOBONO

CURSO DE MECÁNICA TEÓRICA
J. GARCÍA - EJERCICIO CAP. 19

HOJA Nº 1
FECHA 4/9/19

Dado el hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$ queremos hacer una transformación canónica, de tal manera que H se transforme en $K = P$

¿Qué posible Q podemos elegir para que la transformación sea canónica?

Como ni H ni K dependen del tiempo $\Rightarrow H = K$ por lo tanto

$$\boxed{P = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}} \longrightarrow q = \sqrt{2P - p^2}$$

Trabajando con las funciones generadoras Tipo 4 $\begin{cases} \frac{\partial F_4}{\partial p} = -q \\ \frac{\partial F_4}{\partial P} = Q \end{cases}$

$$\frac{\partial F_4}{\partial p} = -\sqrt{2P - p^2}$$

$$F_4 = -\int \sqrt{2P - p^2}\, dp$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial P} = -\int \frac{\partial\left(\sqrt{2P - p^2}\right)}{\partial P}\, dp = -\int \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2P - p^2}}\, 2\, dp = -\int \frac{dp}{\sqrt{2P - p^2}}$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{2P}} \frac{dp}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{2P}}} = -\int \frac{d\left(p/\sqrt{2P}\right)}{\sqrt{1 - \left(p/\sqrt{2P}\right)^2}} = -\operatorname{arcsen}\left(\frac{p}{\sqrt{2P}}\right)$$

$$\boxed{Q = -\operatorname{arcsen} \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}}$$

Para verificar que sea canónica debe cumplirse de que $\det M = 1$ donde

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = q \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = p$$

NOTA

HOJA Nº 2

FECHA

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} + p\left(-\frac{1}{2}\right)(p^2+q^2)^{-3/2}\,2p\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{q}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}\,(p^2+q^2)}\right] = \frac{-q}{p^2+q^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{q}\left[p\left(-\tfrac{1}{2}\right)(p^2+q^2)^{-3/2}\,2q\right] = \frac{p}{p^2+q^2}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & \frac{-q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{pmatrix}$$

$$\det M = p^2/_{p^2+q^2} - q\cdot(-q)/_{p^2+q^2}$$

$\det M = 1 \Rightarrow$ la transformación es canónica

NOTA